数理解析研究所講究録
394巻 1980年 22-33

Kac の Graph 表現論の紹介 I
— Root の公理系について —

筑波大 数学　　森田 純

0. 内容紹介

近年、有限次元半単純 Lie 代数の無限次元への自然な拡張として、Kac－Moody Lie 代数の概念が導入され、また活発に研究されてきている。有限次元の場合に成り立つ種々の公式なども、かなり一般的に拡張されている。(cf. [3], [5], [6], [7])。　また、ブルバキの意味でのルート系の類似も自然に考えることができて、その特徴付けも進められている。(cf. [2], [4])。　ここでは、Kac [2] において考察された Graph 表現論に関して、とくに Kac－Moody Lie 代数のルート系について述べることにする。Graph 表現論との対応については、谷崎 [8] を参照されたい。

Kac [2] において、無限ルート系の特徴付けが述べられているが、これはそのままでは不十分であることが判る。本稿では、その誤ちを修正すると共に、見易い形に整えてみた。

§1において、Kac－Moody Lie代数に関するいくつかの定義と性質を復習する。一般化されたカルタン行列 A（以下、GCM と呼ぶ）によって定義されるKac－Moody Lie代数を L と書く。Δ 及び Δ_+ をそれぞれ L のルート系、L の正ルート系とする。§2において、L から得られる集合 P(A) について考える。この P(A) は、条件 (X1)，(X2)，(Y1)，(Y2) 及び (Y3) を満たす。逆に、これら5つの条件をみたす集合は、丁度あるKac－Moody Lie代数から定義される P(A) となっていることが判る。特に A が与えられたとき、Δ_+ は (Y1)，(Y2) 及び (Y3) によって、一意的に特徴付けられる。

ところで、Δ は実ルート，虚ルートと呼ばれる2種類のルートをもつ。§3では、特に虚ルートについて、Kacによる特徴付けを紹介する。§4で、A が2行2列の場合について、ルートの状態を調べてみよう。§5では、A に関するある条件の下で、ルートの属する格子に不変形式が存在することを示す。

1．Kac－Moody Lie 代数

この節では、Kac－Moody Lie 代数と，そのルート系についての復習をしよう。定義は必要最小限度に留める。詳しくは、Kac [2]，Lepowsky [3]，Moody [4]，小池 [5] 等

を参照されたい。

ℓ を正の整数とし、 $I=\{1,2,\cdots,\ell\}$ とする。 $A=(a_{ij})$ を $\ell\times\ell$ の一般化されたカルタン行列（GCM）とする —— すなわち、 $a_{ij}\in\mathbb{Z}$, $a_{ii}=2$, $a_{ij}\leq 0$ $(i\neq j)$, $a_{ij}=0 \Leftrightarrow a_{ji}=0$。 GCM $A=(a_{ij})$ と標数０の体 K に対して、次の生成元と基本関係式によって定義される K 上の Lie 代数を L_1 で表わす。

《生成元》

$$e_1,\cdots,e_\ell,h_1,\cdots,h_\ell,f_1,\cdots,f_\ell$$

《基本関係式》

$$[h_i,h_j]=0,\qquad [e_i,f_j]=\delta_{ij}h_i$$

$$[h_i,e_j]=a_{ij}e_j,\qquad [h_i,f_j]=-a_{ij}f_j$$

$$(\forall i,j\in I)$$

$$(\mathrm{ad}\ e_i)^{-a_{ij}+1}e_j=0$$

$$(\mathrm{ad}\ f_i)^{-a_{ij}+1}f_j=0$$

$$(\forall i,j\in I,\ i\neq j)$$

$\alpha_1,\cdots,\alpha_\ell$ を自由生成元とする自由 $\mathbb{Z}$-加群を、 $\Gamma=\sum_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha_i$ とする。 L_1 の生成元に次の様に次数を定義することにより、 L_1 を Γ-次数付き Lie 代数と見なす。

$$\deg(e_i)=\alpha_i,\quad \deg(h_i)=0,\quad \deg(f_i)=-\alpha_i$$

このとき、 L_1 の部分空間 $\sum_{i\in I}Ke_i\oplus Kh_i\oplus Kf_i$ との共

通部分が $\{0\}$ であるような L_1 の斉次イデアル全体のなす族 $\mathcal{F}$ を考える。$\mathcal{F}$ に属する2つのイデアルの和も、また $\mathcal{F}$ に属することから、$\mathcal{F}$ には極大元が唯1つ定まる。これを、R_1 と書き、L_1 の根基と呼ぶことがある。（実は、R_1 は $\{0\}$ であろうという予想があるが、ここではこれ以上の議論はしない。） ここで、$L = L(A) = L_1 / R_1$ とおき、これを、K 上に A で定義される Kac − Moody Lie 代数、あるいは単に、<u>Kac − Moody Lie 代数</u> と呼ぶ。L にも L_1 から誘導された Γ−次数付き Lie 代数の構造が入る。e_i, h_i, f_i の L における像をも、同じ e_i, h_i, f_i で表わす。各 $\alpha \in L$ に対して、L の次数 α の元全体のなす部分空間を L_α とする。$H = L_0$ とおく。実は、$H = Kh_1 \oplus \cdots \oplus Kh_\ell$ である。Γ の 0 ではない元 α に対して、$L_\alpha \neq \{0\}$ なるとき、α を L の<u>ルート</u>と呼ぶ。L のルート全体の集合を Δ で表わし、L のルート系という。このとき、定義により、$L = H \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} L_\alpha$ を得る。さらに、Δ は $\Gamma_+ \cup (-\Gamma_+)$ に含まれることが判る。ここに、$\Gamma_+ = \{ \alpha = \sum_{i \in I} k_i \alpha_i \in \Gamma_+ \mid k_i \geq 0, \alpha \neq 0 \}$ とする。$\Delta_+ = \Delta \cap \Gamma_+$, $\Delta_- = \Delta \cap (-\Gamma_+)$ とおき、それぞれ L の正ルート系、負ルート系と呼ぶ。$\Delta_- = -\Delta_+$ なので、ルート系 Δ を調べるには、正ルート

系 Δ_+ について調べれば十分である。

各ルート $\alpha = \sum_{i \in I} k_i \alpha_i$ に対して、L_α は次の様な元で張られることが判る。

$[e_{i_1}, [e_{i_2}, \cdots, [e_{i_{r-1}}, e_{i_r}]\cdots]]$ 　　($\alpha \in \Delta_+$ のとき)

$[f_{i_1}, [f_{i_2}, \cdots, [f_{i_{r-1}}, f_{i_r}]\cdots]]$ 　　($\alpha \in \Delta_-$ のとき)

ここに、e_j または f_j は $|k_j|$ 回出てくる。とくに、$L_{\alpha_i} = Ke_i$, $L_{-\alpha_i} = Kf_i$ である。$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell\}$ とおき、これらを単純ルートと呼ぶ。

さて、各 $i \in I$ に対して、e_i, h_i, f_i で生成される L の部分代数を U_i で表わす。各 U_i は、$\mathfrak{sl}(2, K)$ と同型である。

<u>補題1.</u>　i を1つ固定する。このとき、L の部分空間 $\sum_{\alpha \in \Delta_+ - \{\alpha_i\}} L_\alpha$ は有限次元既約 U_i－加群の直和となる。

<u>証明</u>　$\Delta_+ - \{\alpha_i\}$ を、α_i を法とした同値類に分けたときの代表元 $\{\beta_t\}_{t \in T}$ を固定する。β_t の属する同値類を $\Delta_+(\beta_t)$ と書く。このとき、$\sum_{\alpha \in \Delta_+ - \{\alpha_i\}} L_\alpha = \sum_{t \in T} (\sum_{\alpha \in \Delta_+(\beta_t)} L_\alpha)$ であり、各 $\sum_{\alpha \in \Delta_+(\beta_t)} L_\alpha$ は、有限次元 U_i-加群となる。従って、$\sum_{\alpha \in \Delta_+ - \{\alpha_i\}} L_\alpha$ は、有限次元既約 U_i-加群の直和となる。　(証明終)

<u>補題2.</u>　$\alpha \in \Delta_+ - \Pi$ とする。このとき、$\alpha - \alpha_i$

$\in \Delta_+$ となる $\alpha_i \in \Pi$ が存在する。

証明　$L_\alpha \neq \{0\}$ なので、L_α を張る元で 0 でないもの $[e_{i_1}, [e_{i_2}, \cdots, [e_{i_{r-1}}, e_{i_r}]\cdots]]$ が存在する。このとき、$[e_{i_2}, \cdots, [e_{i_{r-1}}, e_{i_r}]\cdots]$ は、$L_{\alpha-\alpha_{i_1}}$ の 0 でない元である。よって、$\alpha - \alpha_{i_1}$ は Δ_+ の元である。
（証明終）

2．抽象的正ルート系

§1にあるように、$\Gamma = \sum_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i$ を、自由生成元 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell\}$ をもつ自由 $\mathbb{Z}$-加群とし、$\Gamma_+ = \{\alpha = \sum_{i\in I} k_i\alpha_i \in \Gamma \mid k_i \geq 0,\ \alpha \neq 0\}$ とする。$\Gamma^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{Z})$ を Γ の双対空間とする。Γ^* の部分集合 X と Γ の部分集合 Y のなす対 $\Phi = (X, Y)$ が、格子 Γ における、抽象的正ルート系であるとは、次の条件(X1), (X2), (Y1), (Y2), 及び(Y3) が満たされるときに言う。

(X1)　X は ℓ 個の相異なる元 $\varphi_1, \cdots, \varphi_\ell$ からなり、添字集合 I により、名前が付けられている。

(X2)　$\varphi_i(\alpha_i) = 2 \qquad (\forall i \in I)$

(Y1)　$\Pi \subseteq Y \subseteq \Gamma_+$

(Y2)　各 $i \in I$ と、各 $\alpha \in Y - \{\alpha_i\}$ に対して、次の2条件 (*), (**) をみたす非負整数 $p = p(i,\alpha)$, $q = q(i,\alpha)$ が存在する。

(*) $p - q = \phi_i(\alpha)$

(**) $\alpha + k\alpha_i \in \Upsilon \iff -p \leq k \leq q \quad (k \in \mathbb{Z})$

(Υ3) $\alpha \in \Upsilon - \Pi$ に対して、$\alpha - \alpha_i \in \Upsilon$ なる $\alpha_i \in \Pi$ が存在する。

L を GCM A で定義される Kac－Moody Lie 代数とし、Δ_+ を L の正ルート系とする。$\psi_1, \cdots, \psi_\ell$ を、$\psi_i(\alpha_j) = a_{ij}$ で定義される Γ^* の元とする。$\Psi = \{\psi_1, \cdots, \psi_\ell\}$ とおき、$P(A) = (\Psi, \Delta_+)$ とする。各 $\alpha = \sum_{i\in I} k_i\alpha_i \in \Gamma$ に対し、$ht(\alpha) = k_1 + \cdots + k_\ell$ とおき、α の高さという。

命題1. P(A) は、抽象的正ルート系となる。

証明　補題1，2により、(Υ2)，(Υ3) が成り立つ。他の条件は、定義より容易に確かめられる。（証明終）

各抽象的正ルート系 Φ に対して $C_\Phi = (c_{ij})$, $c_{ij} = \phi_i(\alpha_j)$ とおく。

定理1　Φ を抽象的正ルート系とする。

(1) C_Φ は、GCM である。

(2) $\Phi = P(C_\Phi)$ 。

証明 (1) $\phi_i(\alpha_j) \in \mathbb{Z}$, $\phi_i(\alpha_i) = 2$ は定義から明らかである。相異なる $i, j \in I$ に対して、$\alpha_j - \alpha_i \notin \Upsilon$ である。よって、(Υ2) により、$p(i, \alpha_j) = 0$ かつ、

$\phi_i(\alpha_j) = -q(i, \alpha_j) \leq 0$ を得る。一方、$i \neq j$ に対して、$\phi_i(\alpha_j) = 0$ は、$\alpha_i + \alpha_j \notin \Upsilon$ と同値である。従って、$\phi_i(\alpha_j) = 0$ と $\phi_j(\alpha_i) = 0$ は同値である。

(2) これは、次の命題2により導びかれる。

<u>命題</u>2　$\Phi = (X, \Upsilon)$, $\Phi' = (X', \Upsilon')$ を、それぞれ格子 Γ, Γ' における抽象的正ルート系とする。$C_\Phi = C_{\Phi'}$ と仮定する。このとき、$\lambda(\Phi) = \Phi'$ となる同型射 $\lambda : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ が存在する。

<u>証明</u>　$l = \mathrm{rank}\,\Gamma = \mathrm{rank}\,\Gamma'$ とおく。$C_\Phi = C_{\Phi'}$ なので、$\phi_i(\alpha_j) = \phi_i'(\alpha_j')$ である。ここで、$\phi_i \in X$, $\phi_i' \in X'$, $\alpha_j \in \Pi$, 及び、$\alpha_j' \in \Pi'$ である。λ を $\lambda(\alpha_i) = \alpha_i'$ で定義する。このとき、$\phi_i' = \phi_i \circ \lambda^{-1}$ である。$\Upsilon_n = \{\alpha \in \Upsilon \mid ht(\alpha) \leq n\}$, $\Upsilon_n' = \{\alpha \in \Upsilon' \mid ht(\alpha) \leq n\}$ とおく。$n = 1$ のとき、$\lambda(\Upsilon_1) = \Upsilon_1' = \Pi'$ である。$n > 1$, $\lambda(\Upsilon_{n-1}) = \Upsilon_{n-1}'$ と仮定する。$\alpha \in \Upsilon_n$ とする。(Υ3) により、$\alpha - \alpha_i \in \Upsilon_{n-1}$ なる $\alpha_i \in \Pi$ が存在する。このとき、(Υ2) により、$\lambda(\alpha) \in \Upsilon_n'$ を得る。従って、$\lambda(\Upsilon_n) \subseteq \Upsilon_n'$。同様にして、$\lambda^{-1}(\Upsilon_n') \subseteq \Upsilon_n$。ゆえに、$\lambda(\Upsilon) = \Upsilon'$ となる。（証明終）　　Г く。

さらに、Lie 代数の理論なしで、次の２つの結果を導び

<u>命題3</u>　$\Phi = (X, \Upsilon)$ を、抽象的正ルート系とする。このとき、$\mathbb{Z}\alpha_i \cap \Upsilon = \{\alpha_i\}$ が各 i について成り立つ。

<u>証明</u>　$\alpha_i \in \Pi$ とする。$m \leq 0$ ならば $m\alpha_i \notin \Upsilon$ である。$m \in \mathbb{Z}_{>1}$ なる m に対して、$m\alpha_i \in \Upsilon$ と仮定する。(Υ2) により、$\alpha_i, \ldots, m\alpha_i \in \Upsilon$ 。従って、$p(i, m\alpha_i) = m - 1$ となる。このとき、(Υ2) により、$m - 1 \geq p(i, m\alpha_i) - q(i, m\alpha_i) = \phi_i(m\alpha_i) = 2m$。これより、$m \leq -1$ となり、矛盾である。　(証明終)

すべての $\alpha \in \Gamma$ に対して、$w_i(\alpha) = \alpha - \phi_i(\alpha)\alpha_i$ で定義される Γ の自己準同型を w_i とする。$w_i^2 = id.$ である。

<u>命題4</u>　$\Phi = (X, \Upsilon)$ を、抽象的正ルート系とする。このとき、$\Upsilon - \{\alpha_i\}$ は、w_i-不変である。

<u>証明</u>　$\beta \in \Upsilon - \{\alpha_i\}$ とする。このとき、$w_i(\beta) = \beta - \phi_i(\alpha)\alpha_i = \beta + (q - p)\alpha_i$。(Υ2) により、$w_i(\beta) \in \Upsilon$ である。もし、$w_i(\beta) = \alpha_i$ ならば、$\beta = w_i^{-1}(\alpha_i) = -\alpha_i \notin \Upsilon$ となり矛盾である。よって、$w_i(\beta) \in \Upsilon - \{\alpha_i\}$ となる。　(証明終)

3. <u>実ルートと虚ルート</u>

すべての w_i によって生成される $GL(\Gamma)$ の部分群を

W で表わし，Weyl 群と呼ぶ。 $\Delta^{re} = W(\Pi)$，$\Delta^{im} = \Delta - \Delta^{re}$ とおき，その元を実ルート，虚ルートと呼ぶ。$\Delta_+^{im} = \Delta_+ \cap \Delta^{im}$ とする。

各 $\alpha = \sum_{i\in I} k_i\alpha_i \in \Gamma$ に対して，$I(\alpha) = \{ i \in I \mid k_i \neq 0 \}$ とおく。このとき，次の様な図形 S_α を考える。

《頂点》 $i \in I(\alpha)$ に対して，頂点 v_i をつくる。

《辺》 $i \neq j$ に対して，$\varphi_i(\alpha_j)$ ならば，v_i と v_j を結ぶ。 $\overset{v_i}{\circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\circ}\, v_j$

ここで，$M = \{ \alpha \in \Gamma_+ \mid \varphi_i(\alpha) \leq 0,\ S_\alpha = \text{connected} \}$ とおく。Kac [2] により，次が与えられた。

<u>命題</u> 5 $\Delta_+^{im} = \bigcup_{w\in W} (wM)$.

(証明は略する。)

4. <u>例</u>

A を，2×2 の GCM とする。すなわち，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -m \\ -m & 2 \end{pmatrix}, \qquad m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

とする。このとき，今まで述べてきた集合は，具体的に次の様になる。ただし，0 は除かれているものとする。

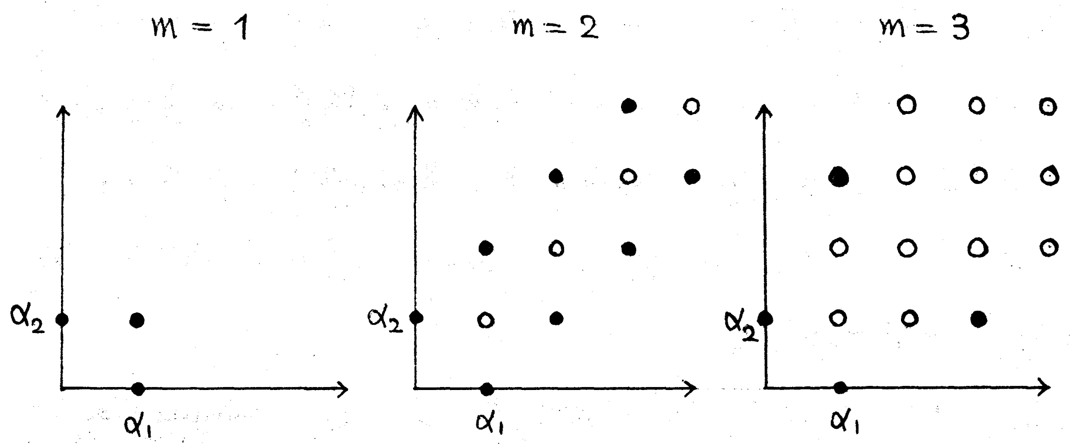
$$\Delta = \{ k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \in \Gamma \mid k_1^2 - mk_1k_2 + k_2^2 \leq 1 \}$$

$$\Delta^{re} = \{ \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \mid \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad = 1 \}$$

$$\Delta^{im} = \{ \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \mid \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad < 0 \}$$

$$M = \{ k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \in \Gamma_+ \mid 2k_1 \leq m k_2,\ 2k_2 \leq m k_1 \}$$

いくつかの例で、実際に図で表わしてみよう。黒丸は実ルート、白丸は虚ルートを表わす。



5. <u>不変双一次形式</u>

GCM. A が対称化可能であるとは、次をみたす行列 B, D が存在するときにいう。

(i) $D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_\ell)$： 非退化対角行列， $d_i > 0$

(ii) $B = (b_{ij})$： 対称行列， $b_{ij} \leq 0 \ (i \neq j)$

(iii) $A = D \cdot B$

このとき、$(\alpha_i, \alpha_j) = b_{ij}$ と定義することによって、Γ 上に1つの双一次形式 $(\ ,\ )$ が与えられる。

<u>命題</u> 6　$(\ ,\ )$ は W－不変である。

<u>証明</u>　$(w_k\alpha_i, w_k\alpha_j) = (\alpha_i - a_{ki}\alpha_k, \alpha_j - a_{kj}\alpha_k)$

$= (\alpha_i, \alpha_j) - a_{ki} b_{kj} - a_{kj} b_{ik} + a_{ki} a_{kj} b_{kk}$

$= (\alpha_i, \alpha_j) - d_k b_{kj} b_{ki} - d_k b_{kj} b_{ki} + d_k b_{ki} \cdot d_k b_{kj} \cdot 2 d_k^{-1}$

$= (\alpha_i, \alpha_j)$ （証明終）

従って、この命題の系として、次の命題を得る

命題 7

(1) $\alpha \in \Delta^{re}$ ならば、$(\alpha, \alpha) > 0$ である。

(2) $\alpha \in \Delta^{im}$ ならば、$(\alpha, \alpha) \leq 0$ である。

注意 Kac [2] での議論では、(Y3) に関する考察が欠けていることを、注意しておく。

参考文献

[1] Bourbaki, N. : "Groupes et algèbres de Lie," Chap. 4-6, Hermann, Paris, 1968.

[2] Kac, V. G. : Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory, Inventiones Math., 56(1980), 57-92.

[3] Lepowsky, J. : "Lectures on Kac-Moody Lie algebras," Paris Univ., 1978.

[4] Moody, R. V. : Root systems of hyperbolic type, Advance Math., 33(1979), 144-160.

さらに、本報告集からの引用として、次の4つを挙げておく。

[5, 岩堀-小池], [6, 成瀬], [7, 田中], [8, 谷崎]